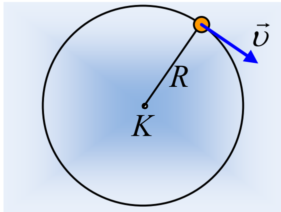
# *Ομαλή κυκλική κίνηση και στροφορμή.*



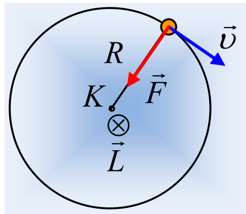
*κάτοψη*

Ένα υλικό σημείο μάζας m εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου νήματος μήκους R με ταχύτητα μέτρου υ, όπως στο σχήμα. Μια ερώτηση, με βάση τη συνήθη πρακτική, όπως τουλάχιστον τη συναντάμε σε ερωτήσεις των πανελλαδικών εξετάσεων είναι:

### *Ερώτηση 1η:*

Να υπολογιστεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος.

Στο παραπάνω ερώτημα, η απάντηση που θεωρείται «αναμενόμενη» είναι:




Το σώμα έχει στροφορμή μέτρου L=mυR, κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, στο κέντρο Κ του διαγραφόμενου κύκλου. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι μηδέν, αφού δεν αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας ή εναλλακτικά:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_{F_\kappa} = 0$$

αφού η τάση του νήματος, η οποία παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, έχει μηδενική ροπή ως προς το κέντρο Κ της τροχιάς. Ας επισημανθεί ότι στο υλικό σημείο ασκούνται και το βάρος, καθώς και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου. Όμως οι δύο αντίθετες (λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα) ασκούμενες δυνάμεις, παράγουν αντίθετες ροπές ως προς το κέντρο της τροχιάς (και ως προς οιαδήποτε άλλο σημείο), οπότε αλληλοεξουδετερώνονται

Με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσε να τεθεί ερώτημα, όπως το παρακάτω:

Η στροφορμή ενός υλικού σημείου, που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση παραμένει σταθερή;

Και η «αναμενόμενη» απάντηση του μαθητή, θα ήταν ότι ναι, **παραμένει σταθερή**.

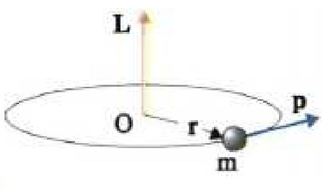
Είναι έτσι τα πράγματα; Τι ονομάζουμε στροφορμή ενός υλικού σημείου ως προς ένα σημείο Α;

Αντιγράφω από το ένθετο του σχολικού βιβλίου!!!

Η στροφορμή υλικού σημείου που στρέφεται γύρω από σημείο Ο, ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{\upsilon} \qquad (4.26)$$

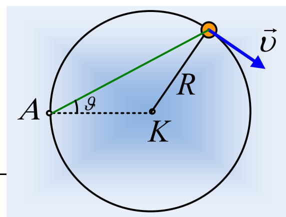
όπου r η επιβατική ακτίνα. Παρατηρήστε πάλι ότι αυτός ο τρόπος ορισμού είναι πολύ πιο κομψός από τον ορισμό που δόθηκε στην παράγραφο 4-7. Η εξίσωση (4.26) δίνει πληροφορίες για το μέτρο τη διεύθυνση και τη φορά της στροφορμής.



Σχ. 4.78

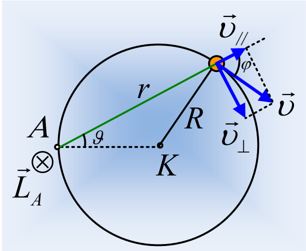
Με βάση τον παραπάνω ορισμό, δεν έχει νόημα η 1η ερώτηση! Δεν μπορούμε να μιλάμε γενικά για στροφορμή, αλλά για στροφορμή ως προς ένα σημείο. Η προηγούμενη απάντηση αναφέρεται σε στροφορμή ως προς το κέντρο της τροχιάς Κ και όχι γενικά ως προς οποιοδήποτε σημείο…

### *Ερώτηση 2η:*




Να υπολογιστεί η στροφορμή του παραπάνω υλικού σημείου ως προς το σημείο

Α του κύκλου, σε συνάρτηση με τη γωνία θ.




Αν συμβολίσουμε r την απόσταση του υλικού σημείου από το σημείο Α, τότε η στροφορμή του, ως προς το Α, είναι ένα διάνυσμα στο σημείο Α, όπου:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}$$

Με βάση τον ορισμό αυτόν, η στροφορμή είναι κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο (άρα κατακόρυφη) με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$L = m\upsilon r \cdot \eta\mu\varphi$$

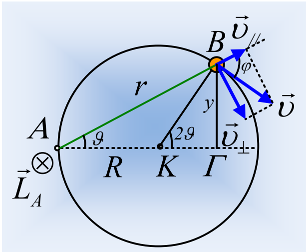
Όπου φ η γωνία που πρέπει να διαγράψει το διάνυσμα $\vec{r}$ ώστε να συμπέσει με το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$.

Αλλά με βάση το σχήμα υ·ημφ=υ⊥, όπου υ⊥ η συνιστώσα της ταχύτητας η κάθετη στην απόσταση r, οπότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί:

$$L = m\upsilon_{\perp} r = m\upsilon d$$

Όπου d η απόσταση του φορέα της ταχύτητας από το σημείο Α.

Η τελευταία σχέση παραπέμπει στον ορισμό της ροπής δύναμης ως προς σημείο. Για το λόγο αυτό, θεωρώ πετυχημένο διδακτικά τον ορισμό της στροφορμής, ως **η ροπή της ορμής** του υλικού σημείου, ως προς το σημείο Α.




Με βάση αυτά, η στροφορμή του υλικού σημείου, στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, έχει μέτρο:

$$L = m\upsilon r \cdot \eta\mu\varphi = m\upsilon r \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αφού οι γωνίες θ και φ είναι συμπληρωματικές. Εξάλλου από το τρίγωνο ΑΓΒ:

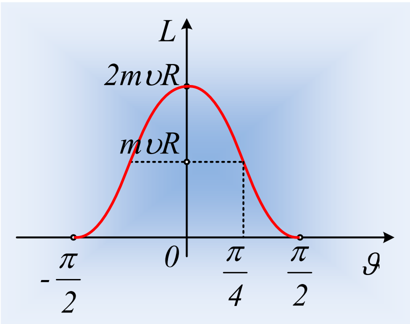
$$\eta\mu\vartheta = \frac{y}{r} = \frac{R\cdot\eta\mu 2\vartheta}{r} \rightarrow r = \frac{R\cdot\eta\mu 2\vartheta}{\eta\mu\vartheta} = 2R\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta \rightarrow$$

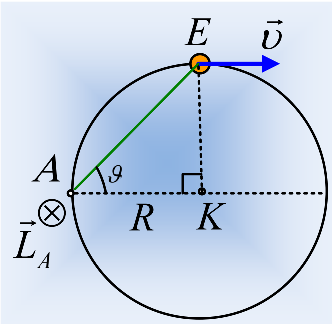
$$L = 2m\upsilon R\cdot\sigma\upsilon\nu^2\vartheta \quad (1)$$

Έτσι αν θ=0, το σώμα βρίσκεται στο αντιδιαμετρικό σημείο του Α, L=2mυR, διπλάσια της αντίστοιχης στροφορμής ως προς το Κ, ενώ για θ=-π/2 ή θ=π/2, έχουμε L=0, αφού το σώμα περνά από το Α.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η γραφική παράσταση της (1), για το μέτρο της στροφορμής ως προς Α, η οποία μπορεί να γραφτεί και ως:

$$L = 2m\upsilon R\cdot\sigma\upsilon\nu^2\vartheta = 2m\upsilon R\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{2} = m\upsilon R + m\upsilon R\cdot\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$$

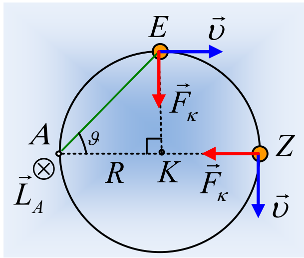



Αξίζει ίσως να επισημανθεί, ότι για θ=45°, το σώμα βρίσκεται στη θέση Ε του δεύτερου σχήματος και η τιμή της στροφορμής του, ως προς Α, είναι ίση με τη στροφορμή ως προς το κέντρο Κ!

### *Ερώτηση 3η :*

Με βάση τα παραπάνω, η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς το Α μεταβάλλεται. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, τις στιγμές που το σώμα περνά από τις θέσεις Ε και Ζ;



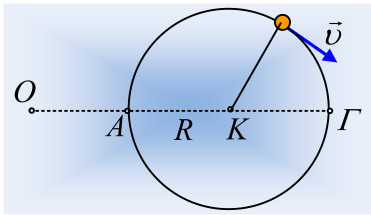

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής σε κάθε θέση προκύπτει από την παράγωγο, ως προς το χρόνο της σχέσης (1). Αλλά με βάση το γενικευμένο νόμο έχουμε ότι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_{F_\kappa}$$

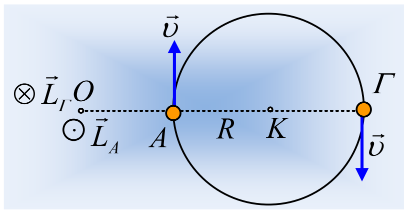
Έτσι στη θέση Ε, $\frac{dL_E}{dt} = \Sigma\tau = F_\kappa R = m\upsilon^2$, με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο και φορά προς τα κάτω, ενώ στη θέση Ζ, $\frac{dL_E}{dt} = \Sigma\tau = 0$.

### *Ερώτηση 4η :*

Να βρεθεί η στροφορμή του υλικού σημείου, ως προς το σημείο Ο, στην προέκταση της ΚΑ και σε απόσταση (ΟΑ)=R, τις στιγμές κατά τις οποίες το σώμα περνά από τις θέσεις Α και Γ, του διπλανού σχήματος. Σε ποιες θέσεις του σώματος μηδενίζεται η στροφορμή του υλικού σημείου, ως προς το Ο;




Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της στροφορμής ως προς το Ο, τις στιγμές που το σώμα περνά από τις θέσεις Α και Γ.

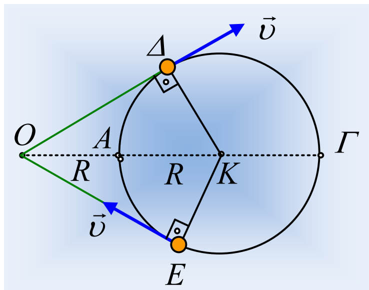



Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$L_A = m\upsilon R \quad \text{και} \quad L_\Gamma = m\upsilon \cdot 3R = 3m\upsilon R$$

Αν αναφερόμαστε για τις τιμές της στροφορμής, θεωρώντας θετική την φορά προς τα πάνω, θα έχουμε:

$$L_A = +m\upsilon R \quad \text{και} \quad L_\Gamma = -3m\upsilon R$$

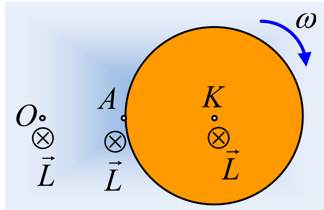



Η στροφορμή εξάλλου μηδενίζεται στις θέσεις, όπου ο φορέας της ταχύτητας περνά από το Ο. Αλλά αυτό συμβαίνει για τα σημεία Δ και Ε, όπου οι ΟΔ και ΟΕ είναι εφαπτόμενες στην κυκλική τροχιά, όπως φαίνονται στο σχήμα. Προφανώς κατά την κίνηση του σώματος πάνω στο τόξο ΔΓΕ, έχει στροφορμή με φορά προς τα κάτω, ενώ όταν το σώμα διαγράφει το τόξο ΕΑΔ, η στροφορμή ως προς το Ο, έχει φορά προς τα πάνω.

### *Σχόλιο.*

Αν αντί να έχουμε την παραπάνω κυκλική κίνηση του υλικού σημείου είχαμε ένα στερεό, π.χ. έναν οριζόντιο δίσκο ο οποίος περιστρέφεται γύρω από **σταθερό** (ακίνητο) κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του Κ, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, θα είχαμε παρόμοια κατάσταση;

Η απάντηση είναι όχι.




Το στερεό που στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του Κ, έχει ιδιοστροφορμή, πάνω στον άξονα (κατακόρυφη) με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$L=I_{cm}\cdot\omega$$

Αλλά αυτή η ιδιοστροφορμή είναι και η στροφορμή, ως προς οποιοδήποτε σημείο του οριζόντιου επιπέδου, οπότε την ίδια στροφορμή θα βρίσκαμε, αν την υπολογίζαμε ως προς το σημείο Α ή ως προς το Ο.

Με άλλα λόγια, η **ιδιοστροφορμή** του στερεού είναι ίδια, ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν υπολογιστεί. Ίσως αυτός είναι και ένας λόγος (τον οποίο προσωπικά δεν αποδέχομαι…) που μιλώντας για στροφορμή του δίσκου, συχνά δεν αναφέρεται το σημείο ή ο άξονας ως προς τον οποίο μετράται…

Αν όμως αυτό ισχύει για το στερεό που περιστρέφεται, γύρω από σταθερό (ακίνητο) άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του, δεν ισχύει για ένα υλικό σημείο, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση!

Ας τονισθεί ότι το κέντρο μάζας στο παραπάνω παράδειγμα είναι ακίνητο. Αν ήταν κινούμενο, τότε ως προς κάποιο σημείο Ο, η στροφορμή θα ήταν το διανυσματικό άθροισμα της ιδιοστροφορμής ($L_{cm}=I_{cm}\cdot\omega$) και της τροχιακής στροφορμής $\left(\vec{L}_\tau = m\cdot\vec{r}_{cm}\times\vec{\upsilon}_{cm}\right)$.

*dmargaris@gmail.com*